空间主动型氢脉泽多段式 C 场设计与仿真分析

曹　进[1,2]，蔡　勇[1]，李锡瑞[1]，庄迪[1]

（1. 中国科学院上海天文台，上海 200030；2. 中国科学院大学，北京 100049）

摘　要：为降低氢脉泽由 C 场不均匀导致的跃迁频率相对变化率，提出了三段螺线管和四组线圈两种 C 场组件设计。利用轴线上磁场的高阶展式计算了 L=0.05-0.5 的三段螺线管构造匀强磁场时的安匝比以及螺线管间距，并选择 L=0.2-0.45 的三段螺线管进行了磁场的有限元分析，给出了不同宽度的三段螺线管磁场非均匀度分布。其中 L=0.45 的三段螺线管在储存泡区域的最大非均匀度为 0.105%，相应的跃迁频率相对变化率为1.02×10^{-13}。采用相同的方法计算了四组线圈以及五组线圈构造匀强磁场时线圈间的安匝比和间距，并对线圈内的磁场进行了有限元仿真，给出了非均匀度分布，四组线圈式 C 场筒内磁场在储存泡区域的非均匀度最大值为 0.066%，相应的跃迁频率相对变化率为6.42×10^{-14}

关键词：氢脉泽；C 场组件；多段螺线管；磁场均匀度

中图分类号：TB939　**文献标识码**：A　**文章编号**：

0　引　言

氢脉泽，也称为氢频率标准，是一种利用氢原子固有特性提供精密时间频率参考的微波激射器 [1]。氢脉泽优异的中长期频率稳定度使其长期在守时授时，导航定位，VLBI 等系统中发挥着重要作用[15]，其频率准确度，稳定性等各项指标也深刻影响着众多关键设施的平稳运行[2-4]。氢原子在磁场中超精细能级结构分裂为 F=1, mF=1; F=1, mF=0; F=1, mF=-1; F=0, mF=0 四个子能级，而氢脉泽就是基于 F=1, mF=0 与 F=0, mF=0 间的跃迁实现了高稳定的频率输出[5]。根据 Rabi-Breit 公式以及$g_J=2.002256$可计算得氢原子基态超精细能级的跃迁频率为[6]

$$\upsilon_{0,0}=\upsilon_0+2766H_0^2 \tag{1}$$

式中：H_0为提供量子化轴的弱外磁场，由氢脉泽中的 C 场组件产生，显然空间不均匀的磁场H_0会导致各部分的原子共振频率产生差别。而实际的原子跃迁谱线是各部分原子谱线的叠加，在空间磁场不均匀的情况下总的谱线宽度必然会增加。不仅如此，原子在强度不同的磁场中运动时可能存在复合跃迁的频率成分，将会导致附加的受激跃迁，使原子能级寿命缩短线宽增加[7]。由式 1 可推得空间不均匀磁场导致的超精细能级跃迁频率相对变化率为[8]

$$\frac{\delta f}{f_0}=5532\frac{H_0^2}{f_0}\frac{\delta H}{H_0} \tag{2}$$

式中：$f_0=1.4204057GHz$，H_0理论值为 1mGs，但实际中由于退磁等因素影响使得H_0一般高于理论值。取$H_0=5mGs$，若要使得$\delta f/f_0<5\times10^{-13}$，相应的磁场非均匀度$\delta H/H_0$需要小于 0.51%。

收稿日期：2022-02-01；　　修回日期：2022-04-01
基金项目：国家自然科学基金（U1731130）；

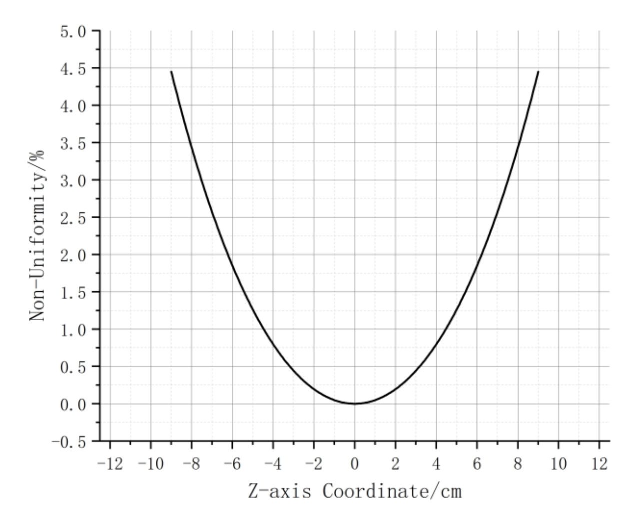


图 1　带辅助场的单螺线管非均匀度分布

Fig.1　Nonuniformity distribution of a single solenoid with auxiliary field

目前的空间主动型氢脉泽 C 场组件由一个单螺线管的主场筒和两个辅助线圈组成[9]，中心螺线管与补偿线圈上的电流分别为 0.386mA 与 0.246mA。利用仿真软件计算线圈中的磁场分布后所得的非均匀度曲线为图 1。由图可知该 C 场组件在储存泡区域的磁场最大非均匀度可达 4.45%，对应的频率相对变化率高于4.33×10^{-12}，而空间氢脉泽频率准确度的指标要求为5×10^{-13}。显然带辅助线圈的单个螺线管产生的磁场并不能很好的满足氢脉泽 C 场的均匀度要求。Jan Wang 提出可利用三个相同半径的线圈增加磁场均匀性[10]，胡朝晖等人证明并计算了九组线圈以内产生匀强磁场的方法与设计[11]，但线圈产生的磁场与螺线管产生的磁场并不相同，多组线圈叠加后的匀强磁场的结果不可直接套用在多段

螺线管上，需要重新计算。潘志兵等人进行了九段线圈式 C 场组件研究[12]，但其方法为利用仿真软件进行参数的反复调整，研究过程过于繁琐，不具有普适性。相较于前人的工作，本文创新之处在于将高阶展式计算方法引入多段式螺线管的均匀度计算，并给出了高均匀度的不同宽度三段式螺线管的相应参数，之后利用有限元仿真计算了其磁场分布及非均匀度。四段及以上螺线管由于计算高阶展式系数时出现奇异矩阵，无法计算出相关参数，因此采用线圈近似的计算方法，并给出了磁场分布的有限元仿真结果，计算了非均匀度分布。

1　三段螺线管构建匀强 C 场

与线圈类似，虽然单个螺线管的磁场并不均匀，但可通过在 z 轴叠加多个螺线管的方式产生磁场相对较均匀的区域。理论上螺线管段数越多，整体越接近于无限长螺线管，产生的磁场越均匀，但考虑到空间氢脉泽有限的容积，以及目前氢脉泽上的 C 场电流控制组件仅为三组，设计时首先考虑三段式螺线管。目前的 C 场螺线管加工工艺为 PCB 板上印刷导线，之后焊接为筒。由于不同宽度的螺线管在线路印刷以及焊接时的误差将对其磁场产生影响，采用三段相同宽度的螺线管为当前技术条件下的较优选择。图 2 为所设计的三段螺线管式 C 场组件的结构示意图。

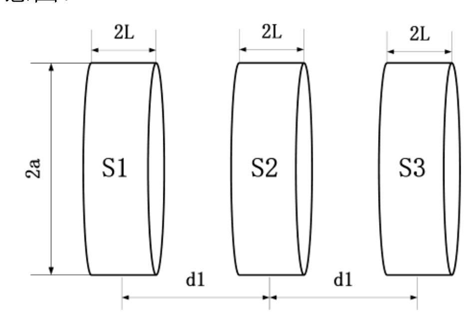


图 2　三段螺线管式 C 场组件示意图

Fig.2　Schematic diagram of three-segment solenoid C-field

对于三段螺线管，令每段螺线管的宽度与半径均为 2L 与 a，螺线管S_1和S_3关于S_2对称，与S_2的距离都为d_1。螺线管S_2上的匝数与电流之积为$n \cdot i$，S_1和S_3上的匝数与电流之积为$n_1 \cdot n \cdot i$，n_1为螺线管S_1和S_3的安匝比。单个螺线管内的轴向磁场分布为[13]

$$B_Z = \frac{a\mu ni}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{\xi(a - r\cos\theta)d\theta)}{\lambda\sqrt{\xi^2+\lambda}}\right]_{\xi_-}^{\xi_+} \tag{3}$$

式中：$\lambda = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$，$\xi_\pm = z \pm l$，z 与 r 为轴向及径向坐标，μ为真空磁导率。令 r=0 并积分即可得到轴向磁场在中心轴上的场强分布

$$B_{Z,r=0}(z) = \frac{a\mu ni}{2}\left(\frac{z+L}{a\sqrt{a^2+(z+l)^2}} - \frac{z-L}{a\sqrt{a^2+(z-l)^2}}\right) \tag{4}$$

因此三段螺线管在中心轴上产生的复合磁场强度为

$$B_C = B_{Z,r=0}(z) + B_{Z,r=0}(z+d_1) + B_{Z,r=0}(z-d_1) \tag{5}$$

将其在$z = 0$处泰勒展开到四阶可得

$$\begin{aligned}B_c &= B_c[0] + \frac{1}{2}B_c''[0]z^2 + \frac{1}{24}B_c^{(4)}[0]z^4 + O[z]^6 \\ &= \mu ni\left(\frac{l}{\sqrt{a^2+l^2}} + \frac{n_1(l-d_1)}{\sqrt{a^2+(d_1-l)^2}} + \frac{n_1(d_1+l)}{\sqrt{a^2+(d_1+l)^2}}\right) + \\ &\frac{3}{2}a^2\mu ni\left(\frac{n_1(d_1-l)}{(a^2+(d_1-l)^2)^{5/2}} - \frac{l}{(a^2+l^2)^{5/2}} + O[z]^6 - \right. \\ &\left.\frac{n_1(d_1+l)}{(a^2+(d_1+l)^2)^{5/2}}\right)z^2 + \frac{5}{8}a^2\mu ni\left(\frac{l(3a^2-4l^2)}{(a^2+l^2)^{9/2}} + \right. \\ &\left.\frac{-3a^2+4(d_1-l)^2(d_1-l)n_1}{(a^2+(d_1-l)^2)^{9/2}} - \frac{-3a^2+4(d_1-l)^2(d_1-l)n_1}{(a^2+(d_1-l)^2)^{9/2}}\right)z^4\end{aligned} \tag{6}$$

仅有偶数阶是因为轴线上的磁场关于原点对称，即B_c为偶函数。显然除了常数项其余高阶项为零的B_c为匀强磁场，因此令

$$\begin{cases}\frac{1}{2}B_c''[0] = 0 \\ \frac{1}{24}B_c^{(4)}[0] = 0\end{cases} \tag{7}$$

联立后即可解得n_1和d_1，归一化a, n, i后下表为计算结果

表1　不同宽度三段式螺线管的安匝比及间距

Table1 Ampere-turn ratio and spacing of three-stage solenoids with different widths

L	n_1	d_1
0.05	1.87447	0.763
0.1	1.85323	0.772
0.15	1.81831	0.7874
0.2	1.77	0.809
0.25	1.71667	0.83826
0.3	1.6438	0.8747
0.35	1.5703	0.91915
0.4	1.49506	0.97193
0.45	1.42225	1.033
0.5	1.35536	1.1019

由表 1 可知随着螺线管宽度 2L 的增加，螺线管间的距离d_1也逐渐增大，而螺线管S_1和S_3的安匝比n_1随之减小。由于氢脉泽内部的体积限制以及设计要求，使得 C 场筒总的高度与直径之比应当在$1-1.5$之间，对应于$1 \le L + d_1 \le 1.5$，因此只能选择$0.2 \le L \le 0.45$的三段螺线筒。

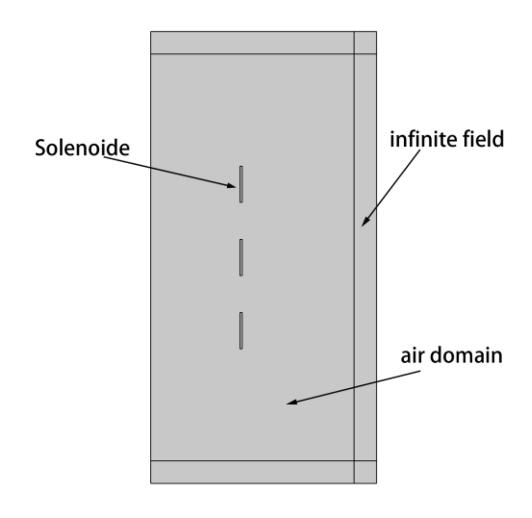


图 3　三段螺线管磁场仿真建模

Fig.3　Three-segment solenoid magnetic field simulation modeling

由于螺线管的轴向磁场及径向磁场的解析表达式都为积分形式，如精确求解需要积分至无限远处，积分结果较为复杂，而利用有限元仿真软件可较为便捷的计算三段式螺线管的空间磁场场强分布，进一步验证不同宽度的三段螺旋管产生磁场均匀程度，并给出非均匀度分布。三段式螺线管产生的磁场呈轴对称分布，因此建模及剖分网格时采用了轴对称式结构。建模由螺线管，空气域以及无限元域三部分组成，引入无限元域是为了减小计算结果受空气域大小的影响，比起有限大的空气域更接近真实的物理环境，计算出的磁场分布也更加符合实际。螺线管区域位于 r=20cm 处，宽度为 0.5cm 长度为 L*12cm。总的场强计算区域为 50cm*100cm 的矩形，其中无限元域位于右侧、顶面及底面高度为 5cm 的层。剖分网格后总的计算单元数为 8411，最大单元为 0.4cm，最小单元为 0.002cm，其中无限元域的单元数为 5，单元大小比为 1，增长公式为接近无限大的等差数列。为了方便结果的比较与分析，设置三组螺旋管线圈匝数均为 20 匝，切面上的螺线管S_2的单匝电流通量为1A，螺线管S_1和S_3上的单匝电流通量为$n_1 \cdot 1$A，对应不同的安匝比。

图 4 为计算所得的不同宽度的三组螺线管产生磁场的空间分布以及磁力线。带箭头的黑色实线为磁力线，颜色深浅表示磁场强弱。由图中蓝色的深浅程度可知三段螺线管中的磁场都较为均匀，在每段螺旋管匝数相同以及中心螺线管电流也相同的情况下，L 越大螺线管中的磁场越弱，越有利于降低跃迁频率的相对变化率。六组螺线管中的磁力线均较为平直，证明磁场的径向分量较小，可有效减少由于磁场方向变换导致的频移。计算不同 L 的三段螺

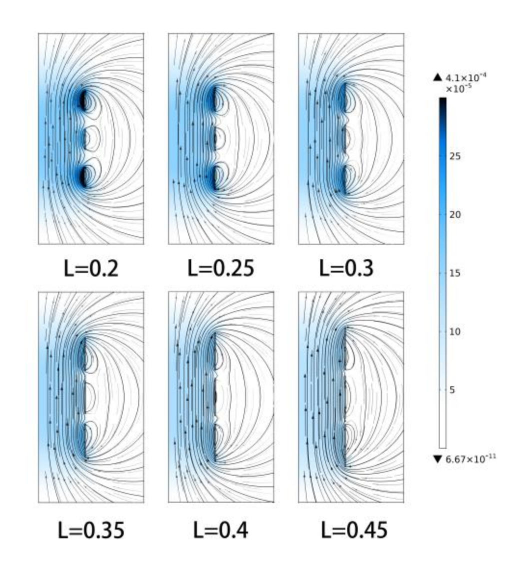


图 4　不同宽度的三段螺线管磁场分布

Fig.4　Magnetic field distribution of three-segment solenoids with different widths

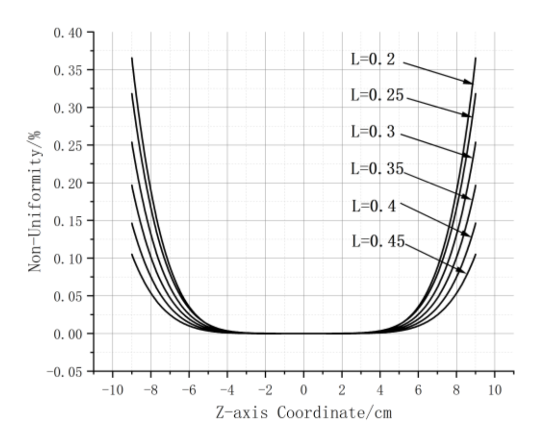


图 5　不同宽度的三段螺线管磁场非均匀度分布

Fig.5　Magnetic field non-uniformity distribution of three-segment solenoids with different widths

线管在轴线上的场强并绘制储存泡区域的非均匀度$(H(z)-H(0))/H(0)$可得图 5，由图 5 可知随着 L 的增大，储存泡区域的非均匀度最大值逐渐降低。对于 L=0.45 的三段线圈，其最大非均匀度为 0.105%，是带辅助线圈的单螺线管非均匀度的 1/42。理论上可将跃迁频率相对变化率降低 42 倍，达到1.02×10^{-13}。脉泽整体的频率准确度还取决于泡壁频移，二阶多普勒频移，腔牵引频移以及自旋交换

频移等多种因素[14]，三段螺线管式 C 场组件对脉泽的频率准确度的提高还需要进一步实测。

2　多组线圈构建匀强 C 场

对于第二部分中提出的多段螺线管构建匀强磁场的参数解法，理论上可扩展至三段以上螺线管，但在实际过程中由于四段及以上螺线管的高阶泰勒展式过于复杂，利用软件数值求解的过程中产生奇异矩阵，无法生成有效的数值解。为此采用宽度与直径比小于 0.04 的螺线管，此时可将螺线管模型简化为线圈模型，即可求出四段及以上螺线管构建匀强磁场时的各项参数。

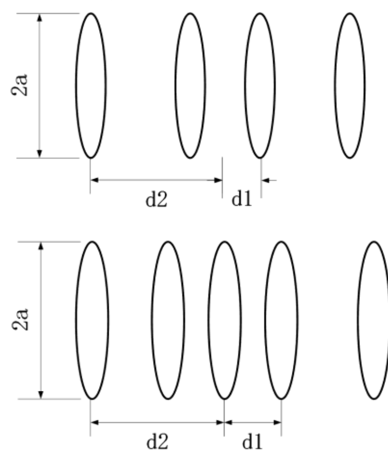


图 6　四组线圈及五组线圈示意图

Fig.6　Schematic diagram of the structure of four sets of coils and five sets of coils

单个 n 匝线圈的轴向磁场在 r=0 处的场强为[10]

$$B(z)=\frac{\mu nia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{8}$$

因此四组线圈在 z 轴上产生的轴向磁场强度为

$$B_{4c}(z)=\frac{\mu nia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(d_1-z)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(d_1+z)^2)^{3/2}}+n_2\left(\frac{1}{(a^2+(d_2-z)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(d_2+z)^2)^{3/2}}\right)\right) \tag{9}$$

五组线圈在 z 轴上产生的轴向磁场强度为

$$B_{5c}=\frac{\mu nia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}}+n_1\left(\frac{1}{(a^2+(d_1-z)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(d_1+z)^2)^{3/2}}\right)+n_2\left(\frac{1}{(a^2+(d_2-z)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(d_2+z)^2)^{3/2}}\right)\right) \tag{10}$$

式中：n_1,n_2为安匝比，d_1,d_2为线圈间隔，μ为真空磁导率，a 为线圈半径，n 为线圈匝数。与三段螺线管相同，无论是四组线圈还是五组线圈由于轴向磁场关于原点对称，其泰勒展式仅有偶数次项。对于四组线圈，有d_1,n_2,d_2三个未知数，将其轴向磁场B_{4c}在 z=0 处展开到 7 阶

$$B_{4c}=B_{4c}[0]+\frac{1}{2}B_{4c}''[0]z^2+\frac{1}{24}B_{4c}^{(4)}[0]z^4+\frac{1}{720}B_{4c}^{(6)}[0]z^6+O[z]^8 \tag{11}$$

并令

$$\begin{cases}\frac{1}{2}B_{4c}''[0]=0\\ \frac{1}{24}B_{4c}^{(4)}[0]=0\\ \frac{1}{720}B_{4c}^{(6)}[0]=0\end{cases} \tag{12}$$

联立即可解得d_1,n_2,d_2。归一化a, n, i后计算所得的$d_1=0.2432,n_2=2.2604,d_2=0.9407$。而对于五组线圈，有$n_1,n_2,d_1,d_2$四个未知数，因此将其轴向磁场$B_{5c}$在$z=0$处展开到 9 阶

$$B_{5c}=B_{5c}[0]+\frac{1}{2}B_{5c}''[0]z^2+\frac{1}{24}B_{5c}^{(4)}[0]z^4+\frac{1}{24}B_{5c}^{(4)}[0]z^4+\frac{1}{720}B_{5c}^{(6)}[0]z^6+\frac{1}{40320}B_{5c}^{(8)}[0]z^8+O[z]^{10} \tag{13}$$

令

$$\begin{cases}\frac{1}{2}B_{5c}''[0]=0\\ \frac{1}{24}B_{5c}^{(4)}[0]=0\\ \frac{1}{720}B_{5c}^{(6)}[0]=0\\ \frac{1}{40320}B_{5c}^{(8)}[0]=0\end{cases} \tag{14}$$

联立并归一化 a, n, i 后计算得 $n_1=1.223,d_1=0.4092,n_2=3.0007,d_2=1.0801.$

采用与第二部分相同的建模形式对四组及五组线圈进行磁场的有限元分析，仿真时每组线圈的匝数都为 20 匝，宽度与半径分别为 1cm 和 20cm，中

心线圈上电流为 1A，其余线圈上电流由安匝比计算所得。图 7 为仿真分析的磁场分布，由图可知五组线圈在匝数与中心线圈电流相同的情况下，产生的磁场强度高于四组线圈，不利于降低频率相对变化率。

图 8 给出了四组线圈和五组线圈在 z 轴上储存泡区域的非均匀度分布。四组线圈在 z 轴上的非均匀度最大值为 0.066%，而五组线圈在 z 轴上的非均匀度最大值为 0.01%，显然五组线圈非均匀度优于

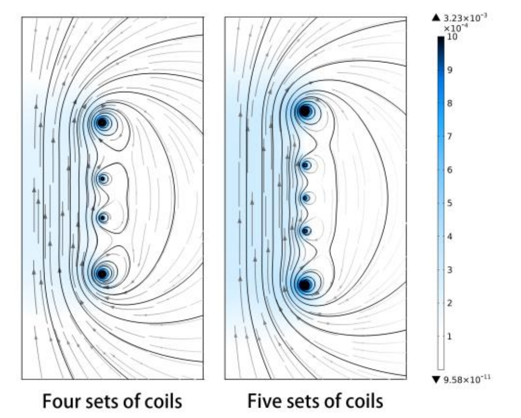


图 7　四组线圈及五组线圈的磁场分布

Fig.7　Magnetic field distribution of four sets of coils and five sets of coils

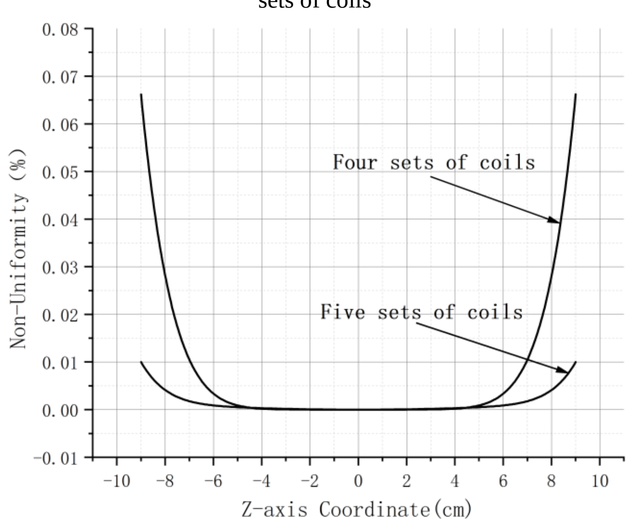


图 8　四组线圈及五组线圈的非均匀度分布

Fig.8　The non-uniformity distribution of four sets of coils and five sets of coils

四组线圈。理论上增加线圈组数可进一步降低非均匀度，且各组线圈间的安匝比以及位置已由胡昭晖等计算得出[11]，但由于每组线圈都需要相应的电流控制器，五组线圈及以上的 C 场组件设计将会增加系统的复杂度，降低空间氢脉泽的运行可靠性。不仅如此，四组线圈对应的频率相对变化率为 6.42×10^{-14}，此时氢脉泽整体的频率准确度取决于泡壁频移以及二阶多普勒频移等因素，继续降低磁场不均匀所导致的频率相对变化可忽略不计，因此四组线圈的设计已满足现有空间氢脉泽的均匀磁场要求。

4　结　论

为降低氢脉泽由 C 场不均匀导致的跃迁频率相对变化率，提出了三段螺线管和四组线圈两种 C 场组件设计。经有限元仿真分析，L=0.45 的三段螺线管式 C 场筒内磁场在储存泡区域的非均匀度最大值为 0.105%，相应的跃迁频率相对变化率为 1.02×10^{-13}，而四组线圈式 C 场筒内磁场在储存泡区域的非均匀度最大值为 0.066%，相应的跃迁频率相对变化率为6.42×10^{-14}。目前 C 场组件为聚四氟乙烯薄板上刻等间距定位槽实现导线均布的螺线筒，加工工艺较为成熟，制作三段式螺线管只需在原有工艺的基础上缩减聚四氟乙烯板的高度即可。对于四组线圈式 C 场组件，由于所需的每组线圈宽度过窄，现有工艺无法满足，目前正在重新设计每组线圈的缠绕以及固定方式，之后将进行三段螺线管式 C 场组件与四组线圈式 C 场组件对氢脉泽输出频率、信号强度等指标影响的进一步比较与研究。

参 考 文 献

[1]　Major, F. G. (2007). The quantum beat: principles and applications of atomic clocks, Springer.

[2]　翟造成 (2001). "上海天文台研制的氢钟及其应用概况." 中国科学院上海天文台年刊(00): 127-131. Zhai, Z. (2001). "Hydrogen clocks of Shanghai Astronomical Observatory and general situation of use." Shanghai Observatory Annals 22: 127-131.

[3]　翟造成 (2003). "我国氢钟研制现状与用于卫星导航的可行性." 宇航计测技术(05): 1-9. Zhai, Z. (2003). "Research status of domestic hydrogen masers and their application prospects for satellite positioning system." J Astron Metrol Meas, 2003, 23: 1 9.

[4]　贯士俊 and 翟造成 (2003). "上海天文台氢钟的研制现状及其应用前景." 中国科学院上海天文台年刊(00): 136-142. Guan, S. and Z. Zhai (2003). "The status of SHAO's hydrogen masers research and their potential application prospects in satellite navigation system." Shanghai Observatory Annals 24: 136-142.

[5] Kleppner, D., et al. (1965). "Hydrogen-maser principles and techniques." Physical Review 138(4A): A972.

[6] Hertel, I. V. and C.-P. Schulz (2014). Atoms, molecules and optical physics, Springer.

[7] Vanier, J. and C. Tomescu (2015). "The quantum physics of atomic frequency standards: recent developments."

[8] 王义遒, et al. (1986). 量子频标原理, 北京：科学出版社.

[9] 王文明 (2016). "一种应用于空间氢钟的 C 场组件设计." 导航定位与授时 3(01): 60-63.

[10] Wang, J., et al. (2002). "An improved Helmholtz coil and analysis of its magnetic field homogeneity." Review of scientific instruments 73(5): 2175-2179.

[11] 胡朝晖, et al. (2018). "产生匀强磁场的圆柱形线圈组设计方法." 北京航空航天大学学报 44(03): 454-461. HU, Z., et al. (2018). "Design method of cylindrical coil systems for generating uniform magnetic field." Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics 44(3): 454.

[12] 潘志兵, et al. (2020). "星载氢原子钟用多段线圈式C 场的仿真及应用." 天文研究与技术 17(03): 341-348. Simulation and Application of Multi-section Coil for C Field Used in SpacePassive Hydrogen Maser.

[13] Callaghan, E. E. and S. H. Maslen (1960). The magnetic field of a finite solenoid, National Aeronautics and Space Administration.

[14] 李玉莹 and 翟造成 (2011). "氢原子钟壁移的测量和消除." 波谱学杂志 28(03): 378-382. LI, Y.-Y. and Z.-C. ZHAI "Measurement and Elimination of Wall Shift of Hydrogen Atomic Clocks."

[15] 王玲玲 (2015). "VLBI 测站时频自动切换系统的设计和实现." 天文研究与技术 12(02): 166-173. Design and Implementation of a Time Frequency System with Auto-Switching Clocks at a VLBI Station.

作者简介：
曹进（1998-），男，硕士研究生，主要从事空间主动型氢原子钟结构及改进等方面的研究。
通信地址：上海市南丹路 80 号上海天文台（200030）
电话：19993624191
E-mail: caojin@shao.ac.cn

Design and Simulation Analysis of Space Active Hydrogen Maser Multi-Segment C-Field

Jin Cao[1,2], Yong Cai[1], Xirui Li[1], Di Zhuang[1]
(1. Shanghai Astronomical Observatory, CAS, Shanghai 200030, China;
2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract： In order to reduce the relative change rate of the transition frequency of the hydrogen masers caused by the inhomogeneous C field, two designs of C field components, three-segment solenoids and four sets of coils, are proposed. Using the high-order expansion of the magnetic field on the axis, the ampere-turn ratio and the solenoid spacing were calculated when the three-segment solenoid with L=0.05-0.5 constructed a uniform magnetic field. The finite element analysis of the magnetic field is carried out with L=0.2-0.45, and the magnetic field non-uniformity distribution with different widths is given. Among them, the maximum non-uniformity with L=0.45 in the storage bubble area is 0.105%, and the corresponding relative change rate of transition frequency is1.02×10^{-13}. Using the same method, the ampere-turn ratio and spacing between coils when four or five sets of coils construct a uniform magnetic field are calculated, and the finite element simulation of the magnetic field in the coil is carried out, and the non-uniformity distribution is given. The maximum non-uniformity of the magnetic field in the storage bubble region in the four sets of coils is 0.066%, and the corresponding transition frequency relative change rate is 6.42×10^{-14}

Key words： Hydrogen Masers; C-Field components; Multi-Segment Solenoid; Magnetic Field

Uniformity